Leçon 201 : Espaces de fonctions
Exemples et applications

Références : Hirsch, Gourdon (un peu au début), Briane-Pagès, El Amrani, Zuily-Queffelec

DEV 1 : Théorème de Stone - Weierstrass

DEV 2 : Théorème de Riesz - Fischer

Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications

Dans cette leçon, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Espaces de fonctions continues sur un compact

1) Généralités [GOU] [HiR]

Soient (E,d), (E',d') deux espaces métriques

DEF 1 : $f : E \to E'$ est dite continue en $a \in E$ lorsque :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, d(x,a) < \eta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

DEF 2 : f est dite uniformément continue sur E lorsque
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x,y \in E, d(x,y) < \eta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

PROP 3 : L'espace $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{K})$ des fonctions continues sur E à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.

EX 4 : Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue. La fonction $f :]0;1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue mais pas uniformément continue.

PROP 4 : Si (E,d) est compact et $f : E \to E'$ est continue, alors $f(E)$ est compact.

THM 5 : (Heine) Si (E,d) est compact et $f : E \to E'$ est continue, alors f est uniformément continue.

DEF 6 : On suppose (E,d) compact. On munit $\mathcal{C}(E,\mathbb{K})$ de la norme : $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ appelée norme de la convergence uniforme

PROP 7 : L'espace $(\mathcal{C}(E,\mathbb{K}), \|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach séparable pour (E,d) compact.

2) Densité [HiR] On suppose (E,d) compact.

DEF 8 : Soit $H \subset \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$. On dit que H est réticulée lorsque $\forall u,v \in H$, $\sup(u,v) \in H$ et $\inf(u,v) \in H$.
On dit que H est séparante lorsque :
$\forall x \neq y \in E, \exists u \in H, u(x) \neq u(y)$.

DEV 1

LEMME 9 : On suppose que E contient au moins 2 éléments. Soit $H \subset \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ telle que :
1) H est réticulée
2) Si x_1 et x_2 sont deux points distincts quelconques de E, et si α_1 et α_2 sont deux réels, il existe $u \in H$, $u(x_1) = \alpha_1$, $u(x_2) = \alpha_2$

Alors H est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$.

THM 10 : Si H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ réticulé, séparant et contenant les fonctions constantes alors H est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$

THM 11 : (Stone-Weierstrass réel) Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ séparante contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$.

EX 12 : L'espace des fonctions lipschitziennes de E dans $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$

EX 13 : Si X est un compact de $\mathbb{R}^d$ et $H = \{x \mapsto P(x) / P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]\}$ est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

COR 14 : Dans le cas $d = 1$ de EX 13 et $X = [a;b]$ est un compact de $\mathbb{R}$, on retrouve le théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur $[a;b]$ est limite uniforme de fonctions polynomiales.

REM 15 : $H = \{z \mapsto P(z), P \in \mathbb{C}[X]\}$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{C})$

THM 16 : (Stone-Weierstrass complexe) : Toute sous-algèbre H de $\mathcal{C}(E,\mathbb{C})$ séparante, auto-conjuguée, contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{C})$.

REM 17 : Stone-Weierstrass peut se généraliser à $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ où E est localement compact.

EX 18 : Soit $f \in \mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^n f(t)\,dt = 0$. Alors $f = 0$.

EX 19 : La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (x \mapsto e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{C})$, où $\mathbb{T}$ est le cercle unité. On a également la densité des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{C})$.

3) Équicontinuité et théorème d'Ascoli [HiR] (E,d) compact

DEF 20 : Une partie H de $\mathcal{C}(E,\mathbb{K})$ est dite équicontinue (e.c) en $x_0 \in E$ lorsque :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, d(x,x_0) < \eta \Rightarrow \forall f \in H, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
On dit que H est équicontinue lorsqu'elle l'est en tout point.

DEF 21 : $H \subset \mathcal{C}(E,\mathbb{K})$ est dite uniformément équicontinue (u.e.c) lorsque :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x,y \in E, d(x,y) < \eta \Rightarrow \forall f \in H, |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

EX 22 : L'espace des fonctions lipschitziennes sur E est e.v.

PROP 23 : (Heine) Une partie de $\mathcal{C}(E,K)$ est équicontinue si et seulement si elle est uniformément équicontinue. (le même rapport)

PROP 24 : Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite équicontinue de $\mathcal{C}(E,K)$ et D une partie dense de E. Si $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pour tout $x\in D$ alors (f_n) converge uniformément vers $f\in\mathcal{C}(E)$.

THM 25 : (Ascoli) Une partie de $\mathcal{C}(E,K)$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(E,K)$ si et seulement si elle est bornée et équicontinue.

APPLI 26 : Soient X, Y deux espaces métriques compacts, $L\in\mathcal{C}(X\times Y, K)$ et μ une mesure telle que $\mu(Y)<\infty$. On définit
$$T : \mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X), \quad f \longmapsto \begin{array}{l} X \longrightarrow K \\ x \longmapsto Tf(x) = \int_Y K(x,y)f(y)\,d\mu(y) \end{array}$$
L'image par T de $\bar{B}_{\mathcal{C}(Y)}(0,1)$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X)$. On dit que T est un opérateur compacte.

II - Espaces L^p de Lebesgue

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $1\leq p\leq\infty$.

1) L'espace vectoriel $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ et son dual [BRi]

DEF 27 : $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mu) = \{f : (\Omega,\mathcal{F}) \to (K, \mathcal{B}(K))$ mesurable $/ \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\}$.
On définit $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$; $\|f\|_\infty = \sup\text{ess}(f) = \inf\{M / \mu(\{f>M\})=0\}$.
$\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}_+, \|f\|_\infty<\infty\}$.

PROP 28 : (Hölder) Soient $p, q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Si $f\in\mathcal{L}^p$ et $g\in\mathcal{L}^q$, alors $fg\in\mathcal{L}^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$.

DEF 29 : On définit pour $p\in[1;+\infty]$, $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu) = \mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)/\sim$ où $\sim$ est l'égalité presque partout.

PROP 29 : $\forall f,g\in L^p$, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (Minkowski)
$(L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu), \|\ \|_p)$ est un espace vectoriel normé. DEV 2

THM 30 (Riesz-Fischer) : L'espace $(L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu), \|\ \|_p)$ est complet. C'est un espace de Banach

PROP 31 : Si $\mu(\Omega)<\infty$, $1\leq p<q<\infty$, $L^\infty(\mu)\subset L^q(\mu)\subset L^p(\mu)\subset L^1(\mu)$

PROP 32 : $(L^2(\mu), \|\ \|_2)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f|g\rangle = \int_\Omega f(t)\overline{g(t)}\,d\mu(t)$.

THM 33 : On suppose μ σ-finie. Soit $1\leq p<\infty$ et q son exposant conjugué. L'application
$$T : L^q \longrightarrow (L^p)^*, \quad g \longmapsto T_g : \begin{array}{l} L^p \longrightarrow K \\ f \longmapsto \int_\Omega fg\,d\mu \end{array}$$
est une isométrie linéaire surjective.
Le dual topologique de L^p "est" L^q.

2) Résultats de densité et convolution [BRi] [ELAM]

PROP 34 : • Pour tout $p\in[1;+\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$
• L'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$.

THM 35 : Pour $(\Omega,\mathcal{F},\mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on a :
• L'espace des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p(\lambda)$, $1\leq p<\infty$
• L'ensemble $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R},K)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\lambda)$, $1\leq p<\infty$.

COR 36 : Soient $a\in\mathbb{R}^d$, $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$. On définit $\tau_a f : x\mapsto f(x-a)$
On a pour tout $p\in[1;+\infty[$, $\|\tau_a f - f\|_p \xrightarrow[a\to 0]{} 0$.

DEF 37 : On dit que deux fonctions sont convolables lorsque pour presque tout $x\in\mathbb{R}^d$, $t\mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable.
On définit alors le produit de convolution
$$f*g : x\in\mathbb{R}^d \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,dt$$

PROP 38 : • Si $f,g\in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f*g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$
• Si $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $(1\leq p<\infty)$, $f*g\in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$

COR 39 : $(L^1(\mathbb{R}^d), +, \cdot, *)$ est une algèbre de Banach commutative.

DEF 40 : On appelle approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ toute suite $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$ telles que : $\forall j\in\mathbb{N}^*$, $\varphi_j\geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_j(x)\,dx=1$ et pour tout $\varepsilon>0$, $\lim\limits_{j\to+\infty}\int_{\|x\|\geq\varepsilon}\varphi_j(x)\,dx = 0$.

THM 41 : Soit $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.
Si $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p\in[1;+\infty[$, $\|f*\varphi_j - f\|_p \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$.

PROP 42 : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \rho_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que : $\rho_\varepsilon \geq 0$, $\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon) \subset \overline{B}(0,\varepsilon)$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon = 1$

THM 43 : $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

III - Le cas de l'espace de Hilbert $L^2_{2\pi}$

1) Théorie L^2 des séries de Fourier [ELAM]

On note $L^2_{2\pi}$ l'espace des fonctions 2π-périodiques dans $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \frac{\lambda}{2\pi})$. On note $c_n(f) = \langle f | e_n \rangle$ les coefficients de Fourier de $f \in L^2_{2\pi}$.

THM 44 : La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

THM 45 : (Parseval) : On a $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ dans $L^2_{2\pi}$. On a de plus $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ pour $f \in L^2_{2\pi}$.

THM 46. L'application $\mathcal{F} : L^2_{2\pi} \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme isométrique entre espaces de Hilbert.

CONTRE-EX 47 : Il existe $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que sa série de Fourier diverge en 0.

EX 48 : En étudiant $x \in]-\pi,\pi] \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ 2π-périodique on trouve $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

2) $L^2(\mathbb{R})$ et transformation de Fourier [ELAM]

THM 49 : L'opérateur
$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}), \quad f \longmapsto \mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \ \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$$
est bien défini, linéaire, continu et $\mathcal{F}(f)(\xi) \xrightarrow[|\xi|\to+\infty]{} 0$

THM 50 : (Fourier-Plancherel) $\mathcal{F}_{|L^1\cap L^2}$ se prolonge en unique isomorphisme isométrique qui définit la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$.

APPLI 51 : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \pi$

3) Totalité des polynômes orthogonaux dans $L^2(I,\omega)$ [ELAM]

DEF 52 : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On appelle poids sur I une fonction $\omega : I \to \mathbb{R}_+^*$ mesurable telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x^n| \omega(x) dx < \infty$.

$L^2(I,\omega) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_I |f(x)|^2 \omega(x) dx < \infty \}$

$L^2(I,\omega)$ est un espace de Hilbert pour $\langle f|g \rangle = \int_I f(x) g(x) \omega(x) dx$

THM 53 : Il existe une unique famille de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg(P_n) = n$. Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associé au poids ω.

THM 54 : Soit ω un poids sur I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} \omega(x) dx < \infty$, alors les polynômes orthogonaux associés à ω forment une base hilbertienne de $L^2(I,\omega)$.

IV - Espaces de fonctions holomorphes [Z-Q]

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On note $H(U)$ l'espace des fonctions holomorphes sur U.

THM 55 (Weierstrass) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H(U)^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur tout compact. Alors $f \in H(U)$ et $\forall k \in \mathbb{N}, f_n^{(k)} \to f^{(k)}$

PROP 56 : $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq n, \operatorname{dist}(z, \Omega^c) \geq \frac{1}{n} \}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, K_n est compact, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$, $\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n$ et pour tout $K \subset \Omega$ compact, il existe $n \geq 1$, $K \subset K_n$.

DEF 57 : $\forall f, g \in H(U)$, on pose $\delta(f,g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$ où $p_n(f) = \sup_{z\in K_n} |f(z)|$

PROP 58 : δ une distance, $(H(U), \delta)$ est complet et $f_n \to f$ uniformément sur tout compact ssi $\delta(f_n, f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

THM 59 : (Montel) Soit $A \subset H(U)$. Alors A est relativement compacte si et seulement si A est localement bornée.

THM 60 : La topologie de la convergence uniforme sur les compacts est métrisable mais pas normable sur $H(U)$.